

جبر خطی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

حمیدرضا ربیعی، مریم رضائی
بهار ۱۴۰۳



کمترین مربعات، مشتق ماتریس و بردار، فضای نرم

تمرین تئوری ششم

تاریخ انتشار: ۱۲ خرداد ۱۴۰۳

۱. پرسش‌های خود در مورد این تمرین را در سامانه کوئرا مطرح کنید.

۲. سیاست ارسال با تاخیر: شما در مجموع در طول نیم‌سال می‌توانید از ۱۶ روز تاخیر استفاده کنید. این مقدار برای تمرین تئوری و عملی به صورت جداگانه حساب می‌شود. تاخیرها با مقیاس ساعت محاسبه شده و به بالا گرد می‌شوند.

۳. سیاست مشارکت دانشجویان در حل کردن تمرین: دانشجویان می‌توانند در حل تمرین برای رفع ابهام و یا به دست آوردن ایده‌ی کلی با یکدیگر مشورت و همفکری کنند. این کار مورد تایید و تشویق تیم ارائه‌ی درس می‌باشد؛ چرا که هم‌فکری و کار گروهی می‌تواند موجب تقویت یادگیری شود. اما به دست آوردن جزئیات راه‌حل و نگارش پاسخ باید تماماً توسط خود دانشجو انجام شود. حتما در انتهای پاسخ‌های ارسالی خود نام افرادی که با آن‌ها همفکری کردید را ذکر کنید.

پرسش ۱ (۲۵ نمره)

(آ) (۱۲ نمره) اگر $c \in \mathbb{R}$ و A یک ماتریس $n \times n$ باشد به طوری که مجموع درایه های هر ستون c باشد، نشان دهید c یک مقدار ویژه است.

(ب) (۱۳ نمره) فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ اعداد حقیقی متمایزی باشند. ثابت کنید که مجموعه توابع $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ در فضای برداری توابع حقیقی روی \mathbb{R} مستقل خطی اند. (راهنمایی: فرض کنید $V = \text{span}(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x})$ باشد و عملگر T را روی V طوری تعریف کنید که به ازای هر تابع $f \in V$ داشته باشیم $Tf = f'$)

پرسش ۲ (۲۵ نمره) مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_x \|W_1(Ax - b)\|_2 + \|W_2(x - c)\|_2$$

که در آن A, W_1, W_2 از جنس ماتریس و x, b, c از جنس بردار هستند. x بهینه را بیابید.

پرسش ۳ (۳۰ نمره)

(آ) (۱۰ نمره)

فرض کنید بردار $\mathbf{y}_{n \times 1}$ و بردار $\mathbf{x}_{n \times 1}$ هر دو تابعی بر حسب بردار $\mathbf{z}_{n \times 1}$ باشند. نشان دهید که اگر $\alpha = \mathbf{y}^T A \mathbf{x}$ باشد به طوری که A یک ماتریس $n \times n$ مستقل از \mathbf{z} باشد خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{x}^T A^T \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}} + \mathbf{y}^T A \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}}$$

(ب) (۱۵ نمره)

اگر A, B, C, X چهار ماتریس باشند به طوری که $F = \text{tr}[AXBXC^T]$ تعریف شده باشد.

مقدار عبارت $\frac{\partial \text{tr}[AXBXC^T]}{\partial X}$ را به دست آورید.

پرسش ۴ (۲۰ نمره) نشان دهید که اگر $v \in \mathbb{R}^n$ ، $v \neq 0$ و داشته باشیم $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ آنگاه عبارت زیر برقرار خواهد بود.

$$\|E(I - \frac{vv^T}{v^T v})\|_F = \|E\|_F - \frac{\|Ev\|_2}{v^T v}$$

تعریف نرم فربنیوس: $\|A\|_F = \text{trace}[AA^T]$

(راهنمایی: خواص *orthogonal projection* را برای $P := \frac{vv^T}{v^T v}$ بررسی کنید).